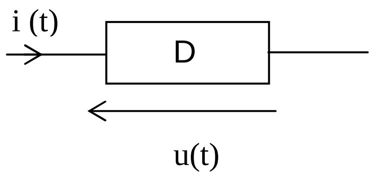
Puissance en régime sinusoïdal forcé

I. Puissance instantanée

Rappel : Nous avons vu la définition de la puissance électrique reçue par un dipôle dans le chapitre 2 d'électrocinétique.



La puissance instantanée reçue par le dipôle est par définition : $\boxed{\boldsymbol{p(t) = u(t).i(t)}}$
Si p(t)>0 : le dipôle reçoit de l'énergie du reste du circuit, il se comporte en récepteur.
Si p(t)<0 : le dipôle donne de l'énergie au reste du circuit, il se comporte en générateur.

ATTENTION : Pour définir la puissance reçue, la convention d'orientation est la convention récepteur (en convention générateur : $\boldsymbol{P(t) = -u(t).i(t)}$)

1. Expression en régime sinusoïdal forcé

On travaille sur des circuits linéaires en régime permanent sinusoïdal. Ainsi les signaux étudiés dans ce chapitre sont des courants et des tensions sinusoïdales de même fréquence f (ou même pulsation $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ avec T la période de ces signaux) :

- $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ avec U_m l'amplitude et φ_u la phase à l'origine de la tension.
- $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ avec I_m l'amplitude et φ_i la phase à l'origine du courant.

La puissance instantanée reçue par le dipôle s'écrit en régime sinusoïdal permanent :

$$p(t) = u(t).i(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) . I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

On peut choisir arbitrairement d'annuler une des phases à l'origine, par exemple $\varphi_u = 0$. En notant $\boldsymbol{\varphi = \varphi_i - \varphi_u = \varphi_i}$ **le déphasage entre le courant et la tension** il vient :

$$\boxed{p(t) = u(t).i(t) = U_m \cos(\omega t).I_m \cos(\omega t + \varphi) = \frac{U_m I_m}{2}[\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)]}$$

p(t) est une fonction sinusoïdale possédant :

- une composante alternative : $\frac{U_m I_m}{2}\cos(2\omega t + \varphi)$ de pulsation 2ω donc de période $\frac{T}{2}$.
- une composante continue : $\frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi) = \mathrm{UI}\cos(\varphi)$ où U et I sont les amplitudes efficaces.

2. Application aux dipôles R, L et C

- Donner la valeur du déphasage $\boldsymbol{\varphi}$ entre le courant et la tension ainsi que la relation entre U et I.
- Tracer sur un même graphe l'allure de la tension, du courant et de la puissance instantanée reçue pour chaque dipôle en fonction du temps.

II. Puissance moyenne

Rappel : Nous savons que la **valeur moyenne d'une fonction périodique du temps y(t) de période T** vérifie **:** $\langle y\rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} y(t')d\,t'$ (voir TP mesures de tensions variables et le chapitre 4 de mécanique sur les oscillateurs).

1. Expression en régime sinusoïdal forcé

La puissance moyenne reçue par un dipôle s'écrit : $P = \langle p\rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} p(t')d\,t'$.

La valeur moyenne de la composante alternative étant nulle il vient : $\boxed{\boldsymbol{P = \langle p\rangle = \mathrm{UI}\cos(\varphi)}}$

Le **produit UI des amplitudes efficaces** désigne la **puissance apparente** du dipôle et le $\boldsymbol{\cos(\varphi)}$ correspond au **facteur de puissance**.

ATTENTION : La puissance est le produit de deux fonctions sinusoïdales, il ne s'agit donc pas d'une opération linéaire. Par conséquent, la période du signal obtenu est différente de celle du courant et de la tension et il faut prendre garde au passage à la notation complexe. En effet, $\underline{\boldsymbol{p}} \neq \underline{\boldsymbol{u}}.\underline{\boldsymbol{i}}$ et l'opération complexe qui donne la puissance (hors programme) vérifie $\underline{p} = \frac{1}{2}\underline{u}.\underline{i}^*$ et $P = R_e(\underline{p})$.

2. Puissance moyenne d'un dipôle linéaire passif (impédance et admittance)

Rappel : Nous avons vu dans la chapitre 5 d'électrocinétique que tout dipôle passif linéaire est caractérisé, **en régime harmonique**, par son impédance $\underline{Z}$ ou son admittance $\underline{Y}$ telles que : $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}}.\underline{\mathbf{I}}$ ou $\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}}.\underline{\mathbf{U}}$ **(en conventions récepteur).** L'impédance et l'admittance étant des nombres complexes on peut écrire :
$\underline{Z} = |\underline{Z}|e^{j(\varphi_u-\varphi_i)}$ ($\arg(\underline{Z}) = \arg\left(\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right) = \varphi_u - \varphi_i$ et $|\underline{Z}| = \left|\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = \frac{U}{I}$) et $\underline{Y} = |\underline{Y}|e^{j(\varphi_i-\varphi_u)}$ ($\arg(\underline{Y}) = \arg\left(\frac{\underline{I}}{\underline{U}}\right) = \varphi_i - \varphi_u$ et $|Y| = \left|\frac{\underline{I}}{\underline{U}}\right| = \frac{I}{U}$).

Comme on a pris arbitrairement $\varphi_u = 0$ et noté $\varphi = \varphi_i - \varphi_u = \varphi_i$ le déphasage entre le courant et la tension il vient : $\boldsymbol{\underline{Z} = |\underline{Z}|e^{-j\varphi}}$ et $\boldsymbol{\underline{Y} = |\underline{Y}|e^{j\varphi}}$.

On peut aussi noter : $\boldsymbol{\underline{Z} = R_e(\underline{Z}) + jI_m(\underline{Z})}$ et $\boldsymbol{\underline{Y} = R_e(\underline{Y}) + jI_m(\underline{Y})}$ avec $R_e(\underline{Y}) = |\underline{Y}|\cos(\varphi)$ et $I_m(\underline{Y}) = |\underline{Y}|\sin(\varphi)$ de même $R_e(\underline{Z}) = |\underline{Z}|\cos(-\varphi) = |\underline{Z}|\cos(\varphi)$ et $I_m(\underline{Z}) = |\underline{Z}|\sin(-\varphi) = -|\underline{Z}|\sin(\varphi)$.

La puissance moyenne en régime sinusoïdal $P = \mathrm{UI}\cos(\varphi)$ peut s'exprimer à l'aide :

- **de l'impédance** : $P = \mathrm{UI}\cos(\varphi) = |\underline{Z}|\mathrm{I}^2\cos(\varphi)$ (car $U = |\underline{Z}|\mathrm{I}$) soit $\boxed{\boldsymbol{P = R_e(\underline{Z})\mathrm{I}^2}}$ (car $R_e(\underline{Z}) = |\underline{Z}|\cos(\varphi)$)
- **de l'admittance** : $P = \mathrm{UI}\cos(\varphi) = |\underline{Y}|\mathrm{U}^2\cos(\varphi)$ (car $I = |\underline{Y}|\mathrm{U}$) soit $\boxed{\boldsymbol{P = R_e(\underline{Y})\mathrm{U}^2}}$ (car $R_e(\underline{Y}) = |\mathrm{Y}|\cos(\varphi)$)

3. Application au circuit RLC série

- Donner la puissance moyenne reçue par chaque dipôle.
- Exprimer l'impédance du dipôle équivalent à l'association série RLC et calculer la puissance moyenne reçue par ce dernier. Conclure.

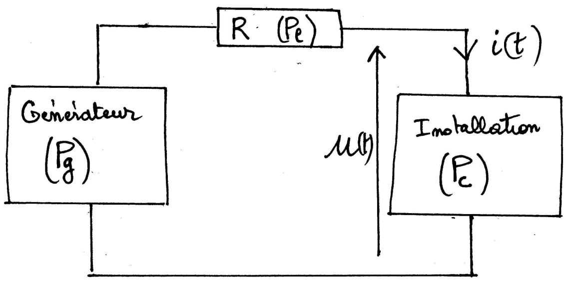
III. Amélioration du facteur de puissance

1. Rendement de transfert de puissance

Un générateur (centrale électrique par exemple) **délivre une puissance moyenne, notée $\boldsymbol{P_g}$**, qui alimente une installation électrique appartenant à un usager. Ce dernier paie pour **la puissance moyenne consommée par son installation notée $\boldsymbol{P_c}$**. En général, $P_g > P_c$ à cause de **la ligne de transport** (résistance R des fils) de **puissance moyenne $\boldsymbol{P_l = RI^2}$** : $P_g = P_c + P_l$.

ligne de transport (de résistance R)

On définit le rendement de transfert de puissance par : $\boxed{\eta = \frac{P_c}{P_g} = \frac{1}{1+\frac{P_l}{P_c}}}$
L'objectif est que l'usager bénéficie au maximum de P_g donc que le rendement soit proche de 1.



$\begin{cases} u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t) \\ i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$

$\boxed{P_c = U \times I \cos\varphi}$

(U et I grandeurs efficaces)

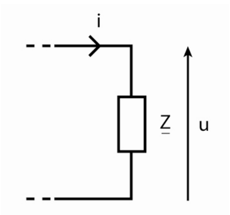
Afin de maximiser $\boldsymbol{\eta}$ il faut minimiser $\boldsymbol{\frac{P_l}{P_c}}$. Comme la puissance consommée P_c est fixée par l'usager, on exprime I en fonction de $P_c = UIcos(\varphi)$ et il vient : $\frac{P_l}{P_c} = \frac{RI^2}{P_c} = \frac{RP_c}{U^2(cos\varphi)^2}$

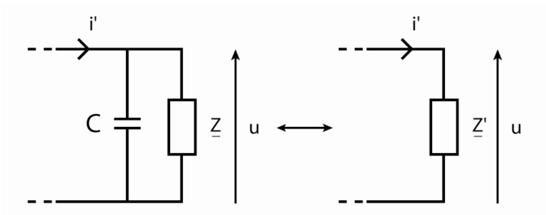
<u>Pour améliorer le rendement de transfert de puissance, plusieurs solutions sont envisageables</u> :

- **diminuer R** (augmentation de la section des fils, choix d'un matériau plus conducteur...)
- **augmenter U** (transport de l'électricité par des lignes à haute tension)
- **augmenter le facteur de puissance $\boldsymbol{cos(\varphi)}$** (voir §2)

2. Application : augmentation du facteur de puissance

On souhaite augmenter le rendement de transfert de puissance d'une installation, modélisée par un dipôle inductif d'impédance $\underline{Z}$, sans modifier la puissance moyenne consommée (la tension d'alimentation est fixée) .
Pour cela, on place en parallèle de l'installation un condensateur de capacité C afin d'obtenir un facteur de puissance maximal (égal à l'unité).





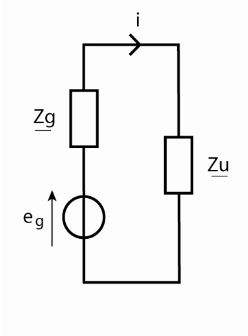
$P_c = \mathrm{UI}\cos(\varphi) = R_e(\underline{Z})\mathrm{I}^2 = R_e(\underline{Y})\mathrm{U}^2$ On note : $\underline{Z} = \mathrm{R} + \mathrm{jX}$ et $\underline{Y} = \mathrm{G} + \mathrm{jB}$ Hypothèse : Dipôle inductif (X>0)	$P_c{}' = \mathrm{UI}'\cos(\varphi') = R_e(\underline{Z'})\mathrm{I}'^2 = R_e(\underline{Y'})\mathrm{U}^2$ Par association parallèle de deux dipôles on obtient : $\underline{Y'} = \underline{Y} + \mathrm{j\omega C}$

On souhaite relever le facteur de puissance à sa valeur maximale : $\boldsymbol{\cos(\varphi') = 1}$ soit $\varphi' = 0$. Or $I_m(\underline{Y'}) = |\underline{Y'}|\sin(\varphi')$ d'où $I_m(\underline{Y'}) = 0$. Par conséquent $\mathrm{B} + \omega\mathrm{C} = 0$ soit $\boldsymbol{C = -\frac{B}{\omega}}$, **capacité du condensateur qui maximise le transfert de puissance.**

<u>Vérification du signe de la capacité</u> : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{Z}^*}{|\underline{Z}|^2} = \frac{\mathrm{R-jX}}{|\underline{Z}|^2} = \mathrm{G} + \mathrm{jB}$ soit $\mathrm{B} = -\frac{\mathrm{X}}{|\underline{Z}|^2} < 0 \; car$ X>0.

<u>Bilan de puissance</u> : Comme $R_e(\underline{Y}) = R_e(\underline{Y'})$ alors $\boldsymbol{P_c = P_c{}'}$: **la puissance moyenne consommée par l'installation reste inchangée**. En revanche comme $|\underline{Y'}| < |\underline{Y}|$ alors $\mathrm{I}' < I$ et **les pertes par effet joule causées par la ligne de transport sont réduites : $\boldsymbol{P_l' < P_l}$.**

IV. Adaptation d'impédance



On cherche maintenant les conditions pour qu'un générateur de tension sinusoïdale $\boldsymbol{e_g(t)} = \mathbf{E\sqrt{2}\cos(\omega t)}$ et d'impédance interne $\underline{\boldsymbol{Z_g}} = \mathbf{R_g} + \mathbf{jX_g}$ fournisse le maximum de puissance à un réseau d'utilisation d'impédance $\underline{\boldsymbol{Z_u}} = \mathbf{R_u} + \mathbf{jX_u}$.
On suppose que les caractéristiques du générateur ($\boldsymbol{e_g}, \underline{\boldsymbol{Z_g}}$) sont fixées et que celles de l'utilisation ($\underline{\boldsymbol{Z_u}}$) sont à déterminer.

La puissance reçue par l'utilisation s'écrit : $P_u = R_e\left(\underline{Z_u}\right)\mathrm{I}^2$. Avec $\underline{I} = \frac{E}{\underline{Z_g} + \underline{Z_u}}$ (loi de Pouillet) il vient $\mathrm{I}^2 = \frac{\mathrm{E}^2}{\left|\underline{Z_g} + \underline{Z_u}\right|^2} = \frac{\mathrm{E}^2}{(\mathrm{R_g}+\mathrm{R_u})^2+(\mathrm{X_g}+\mathrm{X_u})^2}$ soit $\boldsymbol{P_u} = \frac{\mathbf{R_u E^2}}{(\mathbf{R_g}+\mathbf{R_u})^2+(\mathbf{X_g}+\mathbf{X_u})^2}$.

Pour augmenter P_u avec <u>$\mathrm{E}, \mathrm{R_g}$ et $\mathrm{X_g}$ fixées</u> on prend $\mathbf{X_u} = -\mathbf{X_g}$ (on minimise le dénominateur). Ainsi la puissance reçue par l'utilisation devient $\boldsymbol{P_u} = \frac{\mathbf{R_u E^2}}{(\mathbf{R_g}+\mathbf{R_u})^2}$.
On peut encore augmenter P_u en déterminant la valeur de $\mathrm{R_u}$ qui rend la fonction $f(\mathrm{R_u}) = \frac{\mathrm{R_u}}{(\mathrm{R_g}+\mathrm{R_u})^2}$ maximale. Cette valeur de $\mathrm{R_u}$ doit vérifier les deux relations suivantes : $\frac{df}{d\mathrm{R_u}} = 0$ et $\frac{d^2f}{d\mathrm{R_u}^2} < 0$.
<u>Calculs</u> : $\frac{df}{d\mathrm{R_u}} = \frac{\mathrm{R_g}-\mathrm{R_u}}{(\mathrm{R_g}+\mathrm{R_u})^3}$ et $\frac{d^2f}{d\mathrm{R_u}^2} = \frac{2(\mathrm{R_u}-2\mathrm{R_g})}{(\mathrm{R_g}+\mathrm{R_u})^4}$
La solution $\mathbf{R_u} = \mathbf{R_g}$ satisfait aux deux relations et la puissance reçue par l'utilisation devient $\boldsymbol{P_u} = \frac{\mathbf{E^2}}{\mathbf{4R_g}}$.

<u>Conclusion</u> : Les conditions à satisfaire pour que le générateur fournisse le maximum de puissance à l'utilisation sont $\mathrm{X_u} = -\mathrm{X_g}$ et $\mathrm{R_u} = \mathrm{R_g}$ soit $\boxed{\underline{\boldsymbol{Z_u}} = \underline{\boldsymbol{Z_g}}^*}$ **les impédances du générateur et de l'utilisation sont conjuguées : on dit qu'il y a adaptation d'impédance.**

<u>Remarques</u> :
- La condition d'adaptation d'impédance peut aussi s'écrire $\underline{Z_g} = \underline{Z_u}^*$ ou $\underline{Y_g} = \underline{Y_u}^*$ ou encore $\underline{Y_u} = \underline{Y_g}^*$.
- Si les caractéristiques de l'utilisation ($\mathrm{X_u}, \mathrm{R_u}$) sont elles aussi fixées, il faut intercaler un quadripôle entre le générateur et l'utilisation afin de satisfaire l'adaptation d'impédance (voir exercice 4 du TD).